Université Mohammed 1er, Oujda
ENSAH D'AL-Hoceima
A.P., Deuxième année
Année universitaire 2015/2016

Vendredi 22 janvier 2016

Épreuve[1] du Module AP31 : "Algèbre Quadratique".

Examen, Durée : 2h.

Exercice 1 *(12 points)*

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $E = \mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômiale en x. Pour tout polynôme P, soit f_P l'application sur E qui associe, à tout polynôme Q, le nombre

$$f_P(Q) = \int_0^1 P(x)Q'(x)dx + \int_0^1 P'(x)Q(x)dx.$$

   (a) Montrer que f_P est une forme linéaire sur E.

   (b) Trouver les polynômes P de degré 3 tels que f_P soit orthogonale aux polynômes $1, x+1$ et x^2+2.

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une base $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$, soit $\beta^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ la base duale de E^* relative à la base β.
On considère $u = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $\boxed{v = 3e_1 + 4e_2 + e_3}$ et $w = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ trois vecteurs dans E.

   (a) Calculer le produit mixte $(u, v, w)_\beta$. Que peut-on déduire ?

   (b) Déterminer la base duale $\{u^*, v^*, w^*\}$ de E^* en fonction de e_1^*, e_2^* et e_3^*.

3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.

   (a) Montrer que ${}^t(u^n) = ({}^tu)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Quelle est la condition nécessaire pour que ${}^t(u^n) = ({}^tu)^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. (*Justifier*)

4. Soit f une application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ définie pour tout $((x,y,z),(x',y',z'))$ dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par $f((x,y,z),(x',y',z')) = 3xx' + 2xy' + 5xz' + 6yx' + 4yy' + 10yz' + czx' - 18zy' - 45zz'$ où c est un réel fixé.

   (a) Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique.

   (b) Déterminer le c tel que f soit dégénérée.

   (c) Déterminer les homomorphismes associés canoniquement à f, puis trouver les noyaux de ces deux homomorphismes. (*Discuter les cas*)

5. On considère les points $A(1;2;3)$, $B(0;1;5)$ et $C(3;0;4)$ de $\mathbb{R}^3$ relativement à un repère orthonormé direct $(O; e_1, e_2, e_3)$.

   (a) Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Que peut-on déduire ?

   (b) Montrer que le système $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Déterminer l'ensemble des points M tel que la droite (AM) soit perpendiculaire au plan (ABC). Calculer le produit vectoriel $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \wedge \overrightarrow{AM}$.

   (d) Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, puis déterminer l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.

1. Estimation du temps : "Exercice 1 : 1 heure 15 minutes". "Exercice 2 : 45 minutes".

Exercice 2 *(8 points)*

On considère l'application q définie dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(X) = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) - 4x - 4y + 4z,$$

où $X = (x, y, z)^T$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer une matrice symétrique A, un vecteur B et un nombre réel δ tels que $q(X) = X^TAX + B^TX + \delta$.

2. On pose $\varphi(X) = q(X) - B^TX - \delta$.

   (a) Exprimer $\varphi(X)$ en fonction de A et X, puis déterminer le spectre de A et les sous-espaces propres de A. Que peut-on déduire ?

   (b) Déterminer une matrice orthogonale Q de vecteurs propres orthonormés telle que $A = Q^TDQ$ où D est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A.

   (c) Montrer que par un changement de variable $Y = QX$ on a

$$\varphi(Q^TY) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2,$$

   où λ_1, λ_2 et λ_3 sont les valeurs propres de A et $Y = (y_1, y_2, y_3)^T$.

   (d) Citer le théorème de Sylvester, puis déterminer la signature de la forme quadratique φ. Que peut-on déduire ?

3. Calculer QB et $(QB)^T$. En déduire l'expression de $q(X)$ en fonction de y_1, y_2 et y_3.

4. Rappeler la forme polaire d'une forme bilinéaire f associée à la forme quadratique φ, puis déterminer l'expression de f.

4ᵉ DH

DS2 : CP2 : Algèbre Quadratique
2015/2016

Exercice 1 :

1) $E = \mathbb{R}[x]$, soit P un polynôme fixé dans $\mathbb{R}[x]$.

$$f_P : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$Q \longmapsto f_P(Q) = \int_0^1 P(x)Q'(x)\,dx + \int_0^1 P'(x)Q(x)\,dx.$$

a) Montrons que f_P est une forme linéaire sur E :

i) * soit $Q \in E$, alors

$$\int_0^1 P'(x)Q(x)\,dx = \left[P(x)Q(x)\right]_0^1 - \int_0^1 P(x)Q'(x)\,dx$$

donc $\int_0^1 P'(x)Q(x)\,dx + \int_0^1 P(x)Q'(x)\,dx = P(1)Q(1) - P(0)Q(0)$

d'où $f_P(Q) = P(1)Q(1) - P(0)Q(0)$.

or $P(1)Q(1) \in \mathbb{R}$ et $P(0)Q(0) \in \mathbb{R}$, alors :

$P(1)Q(1) - P(0)Q(0) \in \mathbb{R}$ donc $f_P(Q) \in \mathbb{R}, \forall Q \in E$

d'où f_P est une forme sur E.

ii) * soit Q et R deux éléments de E et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$f_P(\alpha Q + \beta R) = P(1)\left(\alpha Q(1) + \beta R(1)\right) - P(0)\left(\alpha Q(0) + \beta R(0)\right)$$
$$= \alpha P(1)Q(1) - \alpha P(0)Q(0) + \beta P(1)R(1) - \beta P(0)R(0)$$
$$= \alpha f_P(Q) + \beta f_P(R)$$

d'où f_P est linéaire sur E.

d'après i) et ii) f_P est une forme linéaire sur E.

b) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.

f_p est orthogonale au polynôme $1 \Leftrightarrow \langle f_p, 1 \rangle = f_p(1) =$

-ie- $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 - a_0 = 0$

donc $\boxed{a_1 + a_2 + a_3 = 0}$ ①

f_p est orthogonale au polynôme $x+1 \Leftrightarrow \langle f_p, x+1 \rangle = 0$

-ie- $(a_0 + a_1 + a_2 + a_3).2 - (a_0) = 0$

donc $\boxed{a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 0}$ ②

f_p est orthogonale au polynôme $x^2+2 \Leftrightarrow \langle f_p, x^2+2 \rangle = 0$.

-ie- $(a_0 + a_1 + a_2 + a_3).3 - 2a_0 = 0$

donc $\boxed{a_0 + 3a_1 + 3a_2 + 3a_2 = 0}$ ③

d'après ①, ② et ③ on a le système :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_0 + 3a_1 + 3a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0. \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ \cancel{a_0} + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 2(a_1 + a_2 + a_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \\ a_3 = -a_1 - a_2. \end{cases}$$

d'où $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 - a_1 x^3 - a_2 x^3$

$$= a_1(x - x^3) + a_2(x^2 - x^3)$$

$$= a_1 x(1 - x^2) + a_2 x^2(1 - x)$$

$$P(x) = (1-x)\left[a_1 x(1+x) + a_2 x^2\right]$$

$$= (1-x)\left[a_1 x + (a_1+a_2)x^2\right].$$

on pose $a_1 = \alpha$, $\beta = a_1 + a_2$, donc :

$(*)$ $P(x) = (1-x)(\alpha x + \beta x^2)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Tous les polynômes du type $(*)$ sont tels que f_P soit orthogonale aux polynômes 1, $1+x$ et $2+x^2$.

2) E un $\mathbb{R}$-e.v. et $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E et $\beta^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ la base duale de E^*

soit $u = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $v = 3e_1 + 4e_2 + e_3$ et $w = e_1 + 2e_2 + 2e_3$

on a le produit mixte $(u,v,w)_\beta = \det_\beta(u,v,w)$

$$(u,v,w)_\beta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(8-2) - 3(6-2) + (3-4)$$

$$= 12 - 12 - 1 = -1 \neq 0$$

on en déduit que le système $\{u,v,w\}$ est libre dans E qui est de dimension 3, alors $\{u,v,w\}$ est une autre base de E.

b) soit $\{u^*, v^*, w^*\}$ la base duale de E^* relative à la base $\{u, v, w\}$.

on a

$$\begin{cases} u^* = a e_1^* + b e_2^* + c e_3^* \\ v^* = a' e_1^* + b' e_2^* + c' e_3^* \\ w^* = a'' e_1^* + b'' e_2^* + c'' e_3^* \end{cases}$$

on a $\langle u^*, u\rangle = 1$, $\langle u^*, v\rangle = 0$ et $\langle u^*, w\rangle = 0$.

$\langle u^*, u\rangle = 1 \iff \langle a e_1^* + b e_2^* + c e_3^*, 2e_1 + 3e_2 + e_3\rangle = 1$

$\iff 2a + 3b + c = 1$. (1)

$\langle u^*, v\rangle = 0 \iff \langle a e_1^* + b e_2^* + c e_3^*, 3e_1 + 4e_2 + e_3\rangle = 0$

$\iff 3a + 4b + c = 0$ (2)

$\langle u^*, w\rangle = 0 \iff \langle a e_1^* + b e_2^* + c e_3^*, e_1 + 2e_2 + 2e_3\rangle = 0$

$\Leftrightarrow \quad a+2b+2c=0 \quad ③$

d'après ~~le système~~ ①, ② et ③ on obtient le système

$$\begin{cases} 2a+3b+c=1 \\ 3a+4b+c=0 \\ a+2b+2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=1-2a-3b \\ 3a+4b+1-2a-3b=0 \\ a+2b+2-4a-6b=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=1-2a-3b \\ a+b=-1 \\ -3a-4b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=1-2a-3b \\ a+b=-1 \\ 3a+4b=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-1-b \\ -3-3b+4b=2 \\ c=1-2a-3b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=5 \\ a=-6 \\ c=13-15=-2 \end{cases}$$

d'où $\boxed{u^*=-6e_1^*+5e_2^*-2e_3^*}$

on a $\langle v^*,u\rangle=0,\ \langle v^*,v\rangle=1,\ \langle v^*,w\rangle=0$

$\langle v^*,u\rangle=0 \Leftrightarrow \langle a'e_1^*+b'e_2^*+c'e_3^*,\ 2e_1+3e_2+e_3\rangle=0$

$\Leftrightarrow \quad 2a'+3b'+c'=0 \quad ①$

$\langle v^*,v\rangle=1 \Leftrightarrow \langle a'e_1^*+b'e_2^*+c'e_3^*,\ 3e_1+4e_2+e_3\rangle=1$

$\Leftrightarrow \quad 3a'+4b'+c'=1 \quad ②$

$\langle v^*,w\rangle=0 \Leftrightarrow \langle a'e_1^*+b'e_2^*+c'e_3^*,\ e_1+2e_2+2e_3\rangle=0$

$\Leftrightarrow \quad a'+2b'+2c'=0 \quad ③$

d'après ①, ② et ③ on obtient le système :

$$\begin{cases} 2a'+3b'+c'=0 \\ 3a'+4b'+c'=1 \\ a'+2b'+2c'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'+b'=1 \\ a'+b'-c'=0 \\ a'+2b'+2c'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'+b'=1 \\ c'=1 \\ a'+2b'=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c'=1 \\ b'=-3 \\ a'=4 \end{cases}$$ d'où $\boxed{v^*=4e_1^*-3e_2^*+e_3^*}$

on a $\langle w^*,u\rangle=0,\ \langle w^*,v\rangle=0,\ \langle w^*,w\rangle=0$

$\langle w^*,u\rangle=0 \Leftrightarrow \langle a''e_1^*+b''e_2^*+c''e_3^*,\ 2e_1+3e_2+e_3\rangle=0$

$\Leftrightarrow \quad 2a''+3b''+c''=0 \quad ①$

$\langle w^*, v\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle a''e_1^* + b''e_2^* + c''e_3^*, 3e_1 + 4e_2 + e_3\rangle = 0$

$\Leftrightarrow 3a'' + 4b'' + c'' = 0$ (2)

$\langle w^*, w\rangle = 1 \Leftrightarrow \langle a''e_1^* + b''e_2^* + c''e_3^*, e_1 + 2e_2 + 2e_3\rangle = 1$

$\Leftrightarrow a'' + 2b'' + 2c'' = 1$ (3)

d'après (1), (2) et (3) on obtient le système :

$$\begin{cases} 2a'' + 3b'' + c'' = 0 \\ 3a'' + 4b'' + c'' = 0 \\ a'' + 2b'' + 2c'' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'' + b'' = 0 \\ c'' = -2a'' - 3b'' \\ a'' + 2b'' + 2c'' = 1 \end{cases}$$

faux

$$\Rightarrow \begin{cases} b'' = -a'' \\ \cancel{c'' = -2a'' + 3b'' = -b''} \\ \cancel{a'' + 2a'' - 2a'' = 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a'' = 1 \\ b'' = -a'' \\ c'' = b'' \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} a'' = -\cancel{\frac{1}{3}}\ 1 \\ b'' = \cancel{\frac{1}{3}}\ 1 \\ c'' = \cancel{\frac{1}{3}}\ 1 \end{cases}$ d'où $\boxed{w^* = -\frac{1}{3}e_1^* + \frac{1}{3}e_2^* + \frac{1}{3}e_3^*}$

$w = e_1^* - e_2^* + e_3^*$ ✓

3) Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme.

a) Montrons que ${}^t(u^n) = ({}^tu)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

* pour $n = 1$, on a $u^1 = u$ et $({}^tu)^1 = {}^tu$.

donc ${}^t(u) = {}^tu$

d'où la propriété est vraie pour $\underline{\underline{n = 1}}$

* supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre $(n-1)$

i.e. ${}^t(u^{n-1}) = ({}^tu)^{n-1}$.

${}^t(u^n) = {}^t(u^{n-1} \circ u) = {}^tu \circ {}^t(u^{n-1}) = {}^tu \circ ({}^tu)^{n-1}$

$= ({}^tu)^n$

d'où la propriété est encore vraie pour n.

* D'après la propriété de récurrence, on a

${}^t(u^n) = ({}^tu)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) on veut $t(u^{-1}) = (t_u)^{-1}$ pour $n=-1$.
alors pour que ceci soit vraie il faut que
$u : E \longrightarrow E$ soit un isomorphisme d'espaces vectoriels
d'où $t_{(u^n)} = (t_u)^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ si u est un automorphisme d'espaces vectoriels

4) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$f((x,y,z),(x',y',z')) = 3xx' + 2xy' + 5xz' + 6yx' + 4yy' + 10yz' + Czx' - 18zy' - 45zz'$.

a) Montrons que f est une forme bilinéaire symétrique:

* f est une forme: En effet $\forall (x,y,z), (x',y',z')$ dans $\mathbb{R}^3$
on a $3xx'$, $2xy'$, $5xz'$, $6yx'$, $4yy'$, $10yz'$, Czx', $-18zy'$ et $-45zz'$ sont des nombres réels, alors la somme de ces nombres est un réels.

d'où $f((x,y,z),(x',y',z')) \in \mathbb{R}$ -ie- f est une forme sur $\mathbb{R}^3$.

* f est bilinéaire: En effet soit $\alpha \in \mathbb{R}$, (x,y,z), (x',y',z') et (x'',y'',z'') ~~dans~~ dans $\mathbb{R}^3$.

$f((x,y,z)+\alpha(x',y',z'),(x'',y'',z'')) = f((x+\alpha x', y+\alpha y', z+\alpha z'),(x'',y'',z''))$

$= 3(x+\alpha x')x'' + 2(x+\alpha x')y'' + 5(x+\alpha x')z'' + 6(y+\alpha y')x'' + 4(y+\alpha y')y'' + 10(y+\alpha y')z'' + C(z+\alpha z')x'' - 18(z+\alpha z')y'' - 45(z+\alpha z')z''$

$= 3xx'' + 2xy'' + 5xz'' + 6yx'' + 4yy'' + 10yz'' + Czx'' - 18zy'' - 45zz''$
$+ \alpha(3x'x'' + 2x'y'' + 5x'z'' + 6y'x'' + 4y'y'' + 10y'y'' + Cz'x'' - 18z'y'' - 45z'z'')$

$= f((x,y,z),(x'',y'',z'')) + \alpha f((x',y',z'),(x'',y'',z''))$

d'où f est linéaire par rapport à la 1ère variable.

Scanned by CamScanner

De la même façon, on montre que

$$f\left((x,y,z),(x',y',z')+\alpha(x'',y'',z'')\right)=f\left((x,y,z),(x',y',z')\right)$$
$$+\alpha f\left((x,y,z),(x'',y'',z'')\right).$$

D'où f est linéaire par rapport à la $2^{\text{ème}}$ variable

Ce qui prouve que f est une forme bilinéaire.

* f est symétrique : En effet $\forall (x,y,z),(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ on a

$3xx'=3x'x$, $2xy'=2y'x$, $5xz'=5z'x$, $6yx'=6x'y$,
$4yy'=4y'y$, $10yz'=10z'y$, $czx'=cx'z$,
$-18zy'=-18y'z$ et $-45zz'=-45z'z$.

d'où $f\left((x,y,z),(x',y',z')\right)=f\left((x',y',z'),(x,y,z)\right)$.

$$\forall (x,y,z),(x',y',z')\in\mathbb{R}^3.$$

d'où f est une forme bilinéaire symétrique.

b). c tel que f soit dégénérée :

$$\begin{aligned}f\left((x,y,z),(x',y',z')\right)&=3xx'+2xy'+5xz'+6yx'+4yy'+10yz'+czx'\\&\quad-18zy'-45zz'\\&=x'(3x+6y+cz)+2y'(x+2y-9z)+5z'(x+2y-9z)\\&=3x'\left(x+2y+\tfrac{c}{3}z\right)+2y'(x+2y-9z)+5z'(x+2y-9z)\\&=(3x'+2y'+5z')(x+2y-9z)\end{aligned}$$

si $\frac{c}{3}=-9$ i.e. $\boxed{c=-27}$

f est dégénérée si $c=-27$.

Scanned by CamScanner

c) soit $u: E \longrightarrow F^*$, $v: F \longrightarrow E^*$ (avec $E = \mathbb{R}$
les deux homomorphismes définis canoniquement à partir

Alors $u: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que

$$f((x,y,z),(x',y',z')) = \langle u(x,y,z), (x',y',z')^T \rangle$$

on a. $f((x,y,z),(x',y',z')) = 3x'(x+2y+\frac{c}{3}z) + 2y'(x+2y-9z) + 5z'(x+2y-9z$

$$= \langle u(x,y,z), (x',y',z')^T \rangle.$$

donc $u: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \longmapsto u(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x+6y+cz \\ 2x+4y-18z \\ 5x+10y-45z \end{pmatrix}.$$

* le noyau $\mathrm{Ker}(u)$ de u :

$$\mathrm{Ker}(u) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / u(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3} \}$$

i) si $c = -27$, alors f est dégénérée et dans ce cas le noyau $\mathrm{Ker}(u)$ est un plan d'équation caractéristique : $x + 2y - 9z = 0$.

ii) si $c \neq -27$, alors f est non-dégénérée, et dans ce cas

$$\mathrm{Ker}(u) = \{ 0_{\mathbb{R}^3} \}.$$

$$f((x,y,z),(x',y',z')) = \langle v(x',y',z'), (x,y,z)^T \rangle.$$

$$= x(3x'+2y'+5z') + y(6x'+4y'+10z') + z(cx'-18y'-45z$$

$$= \langle v(x',y',z'), (x,y,z)^T \rangle.$$

donc $v: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \longmapsto v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x'+2y'+5z' \\ 6x'+4y'+10z' \\ cx'-18y'-45z' \end{pmatrix}$$

* Le noyau de v :

$Ker(v) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / v(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3} \}$.

i) si $c = -27$, alors $Ker(v)$ et un plan vectoriel d'équation caractéristique : $3x + 2y + 5z = 0$.

ii) si $c \neq -27$, alors f et non-dégénérée, donc $Ker(v) = \{ 0_{\mathbb{R}^3} \}$.

5) $A(1;2;3)$, $B(0;1;5)$ et $C(3;0;4)$ trois points de $\mathbb{R}^3$.

a) $\vec{AB} = (x_B - x_A) e_1 + (y_B - y_A) e_2 + (z_B - z_A) e_3$

$= -1 e_1 - 1 e_2 + 2 e_3$

donc $\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\vec{AC} = (x_C - x_A) e_1 + (y_C - y_A) e_2 + (z_C - z_A) e_3$

$= 2e_1 + (-2) e_2 + 1 e_3 = 2e_1 - 2e_2 + 1e_3$

$\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} e_3$

$= 3e_1 + 5e_2 + 4e_3$

donc $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$, ce qui prouve que $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.

on en déduit que le système $\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$ est libre

$\mathbb{R}^3$.

b) on a

$$\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},\quad \vec{AC}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \vec{AB}\wedge\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}$$

alors le produit mixte $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AB}\wedge\vec{AC}) =$

$$\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 5\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 1 & 4\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 2 & 4\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$= -(-8-5) - 2(-4-10) + 3(-1+4)$$

$$= 13 + 28 + 9 = 50 \neq 0.$$

ce qui montre que le système $\{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AB}\wedge\vec{AC}\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, d'où $\{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AB}\wedge\vec{AC}\}$ est une autre base de $\mathbb{R}^3$.

c) $\vec{AM} = (x-1)e_1 + (y-2)e_2 + (z-3)e_3$.

$\vec{AM}$ est un vecteur directeur de la droite (AM).

(AM) est perpendiculaire au plan (ABC) $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\vec{AM} \perp \vec{AB}\\ \vec{AM} \perp \vec{AC}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\vec{AM}, \vec{AB}) = 0\\ (\vec{AM}, \vec{AC}) = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-(x-1)-(y-2)+2(z-3)=0\\ 2(x-1)-2(y-2)+(z-3)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x-y+2z-3=0\\ 2x-2y+z-1=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x+y-2z+3=0\\ 2x-2y+z-1=0\end{cases}$$

Scanned by CamScanner

La droite (AM) est d'équation $\begin{cases} x+y-2z+3=0 \\ 2x-2y+z-1=0 \end{cases}$

L'ensemble des points M tels que $(AM) \perp (ABC)$ est la droite affine passant par le point A et d'équation caractéristique :

$$\begin{cases} x+y-2z+3=0 \\ 2x-2y+z-1=0 \end{cases}$$

* Calculons $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \wedge \overrightarrow{AM}$:

$$\begin{cases} x+y-2z+3=0 \\ 2x-2y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{4}z-\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$= \left(\frac{3}{4}z-\frac{9}{4}\right)e_1 + \left(\frac{5}{4}z-\frac{15}{4}\right)e_2 + (z-3)e_3$$

$$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \wedge \overrightarrow{AM} \quad \begin{vmatrix} 3 & \frac{3}{4}z-\frac{9}{4} \\ 5 & \frac{5}{4}z-\frac{15}{4} \\ 4 & z-3 \end{vmatrix}$$

alors

$$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \wedge \overrightarrow{AM} = \begin{vmatrix} 5 & \frac{5}{4}z-\frac{15}{4} \\ 4 & z-3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} 4 & z-3 \\ 3 & \frac{3}{4}z-\frac{9}{4} \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 3 & \frac{3}{4}z-\frac{9}{4} \\ 5 & \frac{5}{4}z-\frac{15}{4} \end{vmatrix}$$

$$= (5z-15-5z+15)e_1 + (3z-9-3z+9)e_2 +$$

$$\left(\frac{15}{4}z-\frac{45}{4}-\frac{15}{4}z+\frac{45}{4}\right)e_3$$

$$= 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

d'où $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{0}$

d) $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$

$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$

$5\sqrt{2} = \sqrt{6} \cdot 3 \sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$

d'où $\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \dfrac{5\sqrt{2}}{3 \times 6}\sqrt{6} = \dfrac{10}{18}\sqrt{3}$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{9}.$$

$$\boxed{(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \arcsin\left(\frac{5\sqrt{3}}{9}\right)}$$

Scanned by CamScanner

ice 2 $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z) \longmapsto q(x,y,z) = 3(x^2+y^2+z^2) - 2(xy+yz+zx) - 4x - 4y + 4z$

1) $q(x,y,z) = (x,y,z)\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + (-4,-4,4)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 0$.

$= X^T A X + B^T X + \delta$

avec $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $\delta = 0$.

2) on pose: $\varphi(X) = q(X) - B^T X - \delta$

a) on a $\varphi(X) = X^T A X$.

$Sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} / \det(A - \lambda I_3) = 0\}$

$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)^2(1-\lambda)$.

d'où $Sp(A) = \{1;4\}$.

* 1 est une valeur propre simple de A
* 4 est une valeur propre double de A.
* les sous-espaces propres de A :

associé à $\lambda = 4$.

soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à $\lambda = 4$.

alors $Au = 4u$. -ie- $\begin{cases} 3x - y - z = 4x \\ -x + 3y - z = 4y \\ -x - y + 3z = 4z \end{cases}$

donc $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

Le sous-espace propre $\mathcal{H}_1$ de A associé à la valeur prop[re] $\lambda=4$ est un plan vectoriel d'équation $x+y+z=0$.

* Soit $v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à $\lambda=1$

alors $Av=v$. -ie- $\begin{cases}3x-y-z=x\\-x+3y-z=y\\-x-y+3z=z\end{cases}$

donc $\begin{cases}2x-y-z=0\\-x+2y-z=0\\-x-y+2z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}z=2x-y\\-x+2y-2x+y=0\\-x-y+2(2x-y)=0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}z=2x-y\\-3x+3y=0\\3x-3y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=y.\\z=x\end{cases} \Rightarrow x=y=z$

Le sous-espace propre $\mathcal{H}_2$ de A associé à la valeur propre $\lambda=1$ est une droite vectorielle d'équation

$\begin{cases}x=y\\x=z\end{cases}$.

on a $\mathbb{R}^3=\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$, alors A est diagonalisable.

b) La matrice Q orthogonale.

on a $\mathcal{H}_1$: $x+y+z=0$ -ie- $z=-x-y$.

$u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\-x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\-x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\\-y\end{pmatrix}=u_1+u_2$.

on veut u_1 tel que $\|u_1\|_2=1 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

on veut u_2 tel que $\|u_2\|_2=1 \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

donc $u_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ et $u_2=\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

$H_2 : \begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}$.

$w = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$. on veut v tel que $\|v\|_2 = 1$

-ie- $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

$v = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

donc $Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$.

d'où $A = Q^T D Q$ ~~avec~~ $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) on a $\varphi(X) = X^T A X$

$= X^T Q^T D Q X$

$= (QX)^T D \, QX$

on pose: $Y = QX$, alors $X = Q^{-1} Y = Q^T Y$

car Q est orthogonale.

donc $\varphi(X) = \varphi(Q^T Y) = Y^T D Y$

$= (y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$\boxed{\varphi(Q^T Y) = 4y_1^2 + 4y_2^2 + 1y_3^2}$

15

d) Théorème de sylvester :

soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Il existe une base $\{e'_1, \ldots$ telle que si $x = x_1 e'_1 + \cdots + x_n e'_n$, alors on a.

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 \quad (\text{avec } r \leq n)$$

* Le couple $(p, r-p)$ s'appelle la signature de la forme quadratique q.

* on a $\varphi(X) = \varphi(Q^T Y) = 4y_1^2 + 4y_2^2 + 1y_3^2$

$$= (2y_1)^2 + (2y_2)^2 + y_3^2$$

$$= \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$$

d'où $(p, r-p) = (3, 0)$, ce qui prouve que φ est positive.

3) $QB = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{2} \\ \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{3}}{32} \end{bmatrix}$ ♂.

$$QB = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{3} - 6\sqrt{2}}{3} \\ \frac{4\sqrt{3} - 6\sqrt{2}}{3} \\ \frac{8\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{3} - 6\sqrt{2}}{3} \\ \frac{4\sqrt{3} - 6\sqrt{2}}{3} \\ 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$(QB)^T = \left(\frac{4\sqrt{3} - 6\sqrt{2}}{3} ; \frac{4\sqrt{3} - 6\sqrt{2}}{3} , 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \right) \qquad (QB)^T = B^T Q^T$$

$$q(X) = q(Q^T Y) = 4y_1^2 + 4y_2^2 + y_3^2 + \frac{2}{3}(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) y_1 + \frac{2}{3}(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) y_2 + 2(2\sqrt{2} + \sqrt{3}) y_3$$

4) La forme polaire :

$$\frac{1}{2}\left[\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)\right] = f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

or $\varphi(X) = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx)$, alors

$$\varphi(x+y) = 3\left[(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + (x_3+y_3)^2\right] - 2\left[(x_1+y_1)(x_2+y_2) + (x_2+y_2)(x_3+y_3) + (x_3+y_3)(x_1+y_1)\right]$$

$$= \cancel{3x_1^2} + 6x_1y_1 + \cancel{3y_1^2} + \cancel{3x_2^2} + \cancel{3y_2^2} + 6x_2y_2 + \cancel{3x_3^2} + \cancel{3y_3^2} + 6x_3y_3$$
$$\cancel{-2x_1x_2} - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 \cancel{- 2y_1y_2} \cancel{- 2x_2x_3} - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 \cancel{- 2y_2y_3}$$
$$\cancel{-2x_1x_3} - 2x_3y_1 - 2x_1y_3 \cancel{- 2y_1y_3}.$$

$$\varphi(x) = \cancel{3x_1^2} + \cancel{3x_2^2} + \cancel{3x_3^2} \cancel{- 2x_1x_2} \cancel{- 2x_2x_3} \cancel{- 2x_1x_3}$$
$$\varphi(y) = \cancel{3y_1^2} + \cancel{3y_2^2} + \cancel{3y_3^2} \cancel{- 2y_1y_2} \cancel{- 2y_2y_3} \cancel{- 2y_1y_3}.$$

$$\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y) = 6x_1y_1 + 6x_2y_2 + 6x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 - 2x_3y_1 - 2x_1y_3$$

d'où
$$\boxed{f(x,y) = 3x_1y_1 + 3x_2y_2 + 3x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2 - x_3y_1 - x_1y_3.}$$

Méthode facile :

$$f(x,y) = \left[\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)\right] \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[(X+Y)^T A (X+Y) - X^TAX - Y^TAY\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[X^TAX + X^TAY + Y^TAY + Y^TAY - X^TAY - Y^TAY\right] = \frac{1}{2}\left[X^TAY\right]$$
$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + 3x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_1 - x_3y_2 + 3x_3y_3$$